Ueber erzwungene Schwingungen weicher Fäden.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

der philosophischen Fakultät zu Würzburg

eingereicht von

ADOLF ELSAS, CAND. MATH.

Assistent am mathematisch-physikalischen Institut der Universität Marburg.

Elberfeld.

Druck von Johannes Fassbender.

1881.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549807_0162

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung ist aus der Absicht hervorgegangen, die nach der Melde'schen Methode* erzwungenen Schwingungen weicher Fäden einer Untersuchung zu unterwerfen und diese Methode in ihrer Bedeutung für die experimentelle Akustik zu würdigen.

Unter erzwungenen Schwingungen einer Saite versteht man solche, welche durch eine in einem beliebigen Punkte der Saite wirkende periodische Kraft hervorgerufen werden.

Die Melde'sche Methode, weiche Fäden obligatorischen Schwingungen zu unterwerfen, besteht darin, dass ein solcher Faden zwischen einem festen Punkte und einem tönenden Körper ausgespannt wird. Herr Professor Melde wandte zuerst Glocken, später vorzugsweise Stimmgabeln an, und bei den Untersuchungen, welche seiner zweiten Veröffentlichung zu Grunde liegen, benutzte er durchgehends die Einrichtung, welche unter dem Namen des Melde'schen Stimmgabelapparates bekannt geworden ist.

Ein wesentlicher Theil der Melde'schen Arbeiten betraf die Untersuchung der Bahncurven, welche die einzelnen Fadenpunkte bei den erzwungenen Schwingungen beschreiben können. Die obligatorischen Schwingungen weicher Fäden haben aber nach einer anderen Richtung hin grössere Bedeutung erlangt. Heutzutage wird kein Physiker, welcher Experimentalvorlesungen hält oder

*) F. Melde, Ueber die Erregung stehender Wellen eines fadenförmigen Körpers. Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. CIX, Seite 193 und Band CXI Seite 513.

ein Lehrbuch der Physik schreibt, dieselben unberücksichtigt lassen, da sie gestatten, mit geringen Hülfsmitteln und in grossem Massstabe die Schwingungen von Saiten zu veranschaulichen. Die meisten Demonstrationen, zu denen man früher nur das Monochord gebrauchen konnte, können mit ihrer Hülfe sehr anschaulich und, wie die dritte Vorlesung Tyndall's über den Schall zeigt, in eleganter Form ausgeführt werden.

Man wird erwarten können, dass die erzwungenen Fadenschwingungen von verschiedener Art sind, je nachdem die sie erzeugende periodische Kraft (der Impuls der tönenden Stimmgabel) senkrecht zur Richtung des tönenden Fadens oder in derselben wirkt. Es wird sich zeigen, dass die vorhandenen Erklärungen über das Zustandekommen von Transversalschwingungen, welche im zweiten Falle auftreten können, sich nicht wohl halten lassen. Wir werden eine neue Erklärung zu geben versuchen, diese begründen und schliesslich zeigen, inwieweit die erzwungenen Schwingungen der weichen Fäden zu Demonstrationen der Saitenschwingungen und zur Lösung einiger Aufgaben der practischen Akustik benutzt werden können.

Die Versuche, welche dieser Abhandlung zu Grunde liegen, sind meist im mathematisch-physikalischen Institut der Universität Marburg ausgeführt worden. Herrn Professor Melde, dem Director desselben, bin ich für die bereitwillige Ueberlassung seiner Apparate zu grossem Dank verpflichtet.

Es mag noch bemerkt werden, dass zu allen Versuchen auf Resonanzkästen befestigte Stimmgabeln benutzt wurden, weil die Stimmgabelschwingungen einfache, pendelartige sind. Die Gabeln wurden durch einen Violinbogen zum Tönen gebracht. Will man die Erscheinungen der erzwungenen Fadenschwingungen verfolgen, so genügt es überhaupt, in Ermangelung des Melde'schen Stimmgabelapparates einen dünnen Seiden- oder Baumwollenfaden mit einem Tropfen Harzkitt auf der Endfläche einer Stimmgabelzinke zu befestigen, nachdem man diese zuvor mit etwas Colophonium- oder Schellacklösung überzogen hat, den Faden über eine leicht bewegliche Rolle zu leiten, wie es auch Tyndall that, und an das Ende ein Wagschälchen zur Aufnahme von Spannungsgewichten anzuhängen. Eine solche Einrichtung ist in mancher Hinsicht dem Melde'schen Stimmgabelapparat vorzuziehen, weil sie gestattet, den

Faden beliebig lang zu nehmen und weil einige bei dem Stimmgabelapparat auftretende complicirtere Erscheinungen, welche vielleicht in elastischen Nachwirkungen ihre Erklärung finden, sich bei dieser Einrichtung nicht zeigen.

§. 1.

Theorie der Schwingungen, welche durch eine senkrecht zum Faden wirkende periodische Kraft erzeugt werden.

Die partielle Differentialgleichung der transversalen Schwingungsbewegung eines homogenen, durch Spannung elastischen fadenförmigen Körpers lautet bekanntlich, wenn auf Dämpfung der Schwingungen durch Reibung keine Rücksicht genommen wird:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Pg}{p} \frac{d^2y}{dx^2}.$$

In dieser Gleichung bedeutet P die Spannung des Fadens, p das Gewicht der Längeneinheit des Fadens und g die Fallbeschleunigung in der Zeiteinheit. Unter der Voraussetzung, die Dämpfung der Schwingungen sei proportional der augenblicklichen Geschwindigkeit des Fadenelements, lässt sich die aus der Reibung herrührende Verzögerung darstellen durch $2s \frac{dy}{dt}$, wobei 2s eine durch Versuche zu bestimmende Constante bezeichnet, nämlich die Dämpfung, welche der Geschwindigkeit 1 entspricht.

Die Verzögerung durch die Dämpfung haben wir von der aus der Spannung des Fadens herrührenden Beschleunigung, welche gleich $\frac{Pg}{p} \frac{d^2y}{dx^2}$ ist, zu subtrahiren, um die wirkliche Beschleunigung der Bewegung zu finden, dann erhalten wir das Bewegungsgesetz für die gedämpfte Saite ausgesprochen in der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Pg}{p} \frac{d^2y}{dx^2} - 2s \frac{dy}{dt} \text{ oder}$$

$$\text{(I)} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2s \frac{dy}{dt} = k^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

wenn wir $\sqrt{\frac{Pg}{p}} = k$ setzen.

Das Problem der erzwungenen Schwingungen unterscheidet sich von dem der freien Schwingungen durch die Bedingungsgleichungen, welchen die Lösung der Gleichung (I) entsprechen muss.

Wir denken uns die Schwingungen des Fadens erzeugt durch die Schwingungen eines materiellen Systems, mit welchem der eine Endpunkt des Fadens verbunden ist und dessen Teilchen einfache pendelartige Schwingungsbewegungen vollführen. Die Masse des Fadens sei im Vergleich zu der Masse dieses materiellen Systems so gering, dass die Vibration des letzteren durch die Fadenschwingungen nicht beeinflusst wird. Dann haben wir die Bedingung mathematisch auszudrücken, dass der eine Endpunkt des Fadens gezwungen ist, eine einfache pendelartige Schwingung zu vollführen:

II) für $x = o$ . . . . $y = \frac{a}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T}$

wenn t die Zeit bedeutet, welche seit einem beliebigen Durchgange des Punktes durch die Gleichgewichtslage verflossen ist, T die Schwingungsdauer oder Periode und $\frac{a}{2}$ die grösste Amplitude der erzwungenen Schwingung des Fadenendes.

Ferner haben wir die Voraussetzung zu machen, dass der andere Endpunkt des Fadens vollkommen fest ist, so dass wir als zweite Bedingungsgleichung erhalten:

III) für $x = l$ . . . . $y = o$.

Als particuläre Lösung der Gleichung (I) versuchen wir

$$e^{\alpha x + \beta t}$$

Diese genügt der Gleichung (I), wenn

$$\beta^2 + 2s\beta = k^2\alpha^2 \text{ oder } k\alpha = \pm\sqrt{\beta^2 + 2s\beta}.$$

Wir erhalten also als particuläre Lösung:

$$e^{\beta t \pm \frac{1}{k}\sqrt{\beta^2 + 2\beta s}\, x}$$

Entwickeln wir die Wurzelgrösse $\sqrt{\beta^2 + 2s\beta}$ nach dem binomischen Lehrsatz und nehmen wir an, die Dämpfung der Bewegung sei so gering, dass wir bei dieser Entwickelung die Glieder mit der zweiten und den höheren Potenzen von s vernachlässigen dürfen, so wird die particuläre Lösung:

$$e^{\beta t \pm \frac{\beta + s}{k} x}$$

Berücksichtigen wir, dass β auch eine rein imaginäre Grösse bi sein kann, so erhalten wir die neuen Lösungen

$$e^{\frac{s}{k}x} \cos b\left(t+\frac{x}{k}\right) \text{ und } e^{-\frac{s}{k}x} \cos b\left(t-\frac{x}{k}\right)$$

und ebenso die beiden anderen

$$e^{\frac{s}{k}x} \sin b\left(t+\frac{x}{k}\right) \text{ und } e^{-\frac{s}{k}x} \sin b\left(t-\frac{x}{k}\right)$$

Die letzteren vier Lösungen multipliciren wir mit beliebigen (aber von x und t unabhängig gedachten) Faktoren und erhalten dann durch Addition:

$$(1)\quad y = m_1 e^{\frac{s}{k}x} \cos b\left(t+\frac{x}{k}\right) + m_2 e^{-\frac{s}{k}x} \cos b\left(t-\frac{x}{k}\right) +$$

$$n_1 e^{\frac{s}{k}x} \sin b\left(t+\frac{x}{k}\right) + n_2 e^{-\frac{s}{k}x} \sin b\left(t-\frac{x}{k}\right).$$

Um die Faktoren m und n, sowie die Grösse b zu bestimmen, setzen wir $x = o$ und beachten, dass dann zufolge der Bedingungsgleichung (II) y die Bewegung des vibrirenden Befestigungspunktes darstellen muss, so dass wir haben:

$$(m_1 + m_2) \cos bt + (n_1 + n_2) \sin bt \equiv \frac{a}{2} \sin 2\pi \frac{t.}{T}$$

Da diese Identität für jeden Werth von t, von o an aufwärts, bestehen muss, erhalten wir zur Bestimmung der Grössen m, n und b die Gleichungen:

$$m_1 + m_2 = o, \quad n_1 + n_2 = \frac{a}{2}, \quad b = \frac{2\pi}{T}$$

Diesen entsprechend eliminiren wir m_2 und n_2 aus Gleichung (1) und führen den bestimmten Werth für b in dieselbe ein. Setzen wir dann $x = l$, so erhalten wir in Gemässheit der Bedingungsgleichung (III) die Identität:

$$m_1 \left[e^{\frac{s}{k}l} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{l}{k}\right) - e^{-\frac{s}{k}l} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{l}{k}\right)\right] +$$

$$n_1 \left[e^{\frac{s}{k}l} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{l}{k}\right) - e^{-\frac{s}{k}l} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{l}{k}\right)\right] + \frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}l} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{l}{k}\right) \equiv o,$$

aus welcher wir, da dieselbe für jeden Werth von t, von o an aufwärts gelten muss, weiter die Gleichungen ableiten:

$$m_1 \left(e^{\frac{s}{k}l} - e^{-\frac{s}{k}l}\right) \cos \frac{2\pi}{T}\frac{l}{k} + n_1 \left(e^{\frac{s}{k}l} + e^{-\frac{s}{k}l}\right) \sin \frac{2\pi}{T}\frac{l}{k} = \frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}l} \sin \frac{2\pi}{T}\frac{l}{k},$$

$$m_1 \left(e^{\frac{s}{k}l} + e^{-\frac{s}{k}l}\right) \sin \frac{2\pi}{T}\frac{l}{k} - n_1 \left(e^{\frac{s}{k}l} - e^{-\frac{s}{k}l}\right) \cos \frac{2\pi}{T}\frac{l}{k} = \frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}l} \cos \frac{2\pi}{T}\frac{l}{k}.$$

Aus diesem erhalten wir für m_1 und n_1 die Werthe:

$$m_1 = \frac{a}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}}{e^{2\frac{s}{k}l} - 2\cos \frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k} + e^{-2\frac{s}{k}l}},$$

$$n_1 = \frac{a}{2} \frac{e^{-2\frac{s}{k}l} - \cos \frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}}{e^{2\frac{s}{k}l} - 2\cos \frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k} + e^{-2\frac{s}{k}l}}$$

Führen wir die Substitution in Gleichung (1) aus, so haben wir in derselben gleichzeitig zu setzen:

$$m_2 = -m_1 = \frac{-a}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{2l}{k}}{e^{2\frac{s}{k}l} - 2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k} + e^{-2\frac{s}{k}l}}$$

$$n_2 = \frac{a}{2} - n_1 = \frac{a}{2} \frac{e^{2\frac{s}{k}l} - \cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}}{e^{2\frac{s}{k}l} - 2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k} + e^{-2\frac{s}{k}l}}$$

dann resultirt nach einigen Reductionen als Gleichung für die Fadenschwingung:

$$(2)\quad y = \frac{a}{2} \frac{1}{e^{2\frac{s}{k}l} - 2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k} + e^{-2\frac{s}{k}l}} \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{s}{k}(2l-x)} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{k}\right) + e^{-\frac{s}{k}(2l-x)} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{k}\right) \\ -e^{\frac{s}{k}x} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2l-x}{k}\right) - e^{-\frac{s}{k}x} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{2l-x}{k}\right) \end{array} \right\}$$

oder, wenn man die Sinusse entwickelt und die Glieder, welche mit $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ resp. $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ multiplicirt sind, zusammenfasst:

$$(3)\quad y = \frac{a}{2} \frac{1}{e^{2\frac{s}{k}l} - 2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k} + e^{-2\frac{s}{k}l}} \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\pi\frac{t}{T}\left[\left(e^{\frac{s}{k}(2l-x)} + e^{-\frac{s}{k}(2l-x)}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\frac{x}{k} - \left(e^{\frac{s}{k}x} + e^{-\frac{s}{k}x}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l-x}{k}\right] \\ -\cos 2\pi\frac{t}{T}\left[\left(e^{\frac{s}{k}(2l-x)} - e^{-\frac{s}{k}(2l-x)}\right)\sin\frac{2\pi}{T}\frac{x}{k} - \left(e^{\frac{s}{k}x} - e^{-\frac{s}{k}x}\right)\sin\frac{2\pi}{T}\frac{2l-x}{k}\right] \end{array} \right\}$$

Letzterer Ausdruck für die Configuration des Fadens zur Zeit t hat die allgemeinste Form der Gleichungen für stehende Schwinguugen:

$$y = \frac{A}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T} + \frac{B}{2} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

Die Grössen A und B, durch welche die Amplituden der einzelnen Fadenpunkte bestimmt werden, sind nur von der Lage der betreffenden Fadenpunkte abhängig, aber nicht mit der Zeit veränderlich. Die Periode der erzwungene Fadenschwingung ist gleich der Periode der erregenden Schwingungsbewegung, dem Gesetze entsprechend, welches für alle erzwungenen Schwingungen gilt.

---

§ 2.

Freie Schwingungen, mit welchen der Faden in die Bewegung eintrat, sind ohne Einfluss auf den Endzustand desselben.

Die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen ist die vollständige und einzige Lösung des Problems der erzwungenen Fadenschwingungen, d. h. der Faden kann keine andere Schwingung vollführen, deren Periode durch die gegebene äussere periodische Einwirkung bestimmt ist. Indessen könnte es möglich scheinen, dass der Faden noch andere über die erzwungenen superponirbare Schwingungsbewegungen vollführte. Da nun jedenfalls diejenigen Schwingungen ausgeschlossen sein müssen, welche durch eine continuirliche oder eine andere als die unserer Betrachtung zu Grunde gelegte periodische Einwirkung erzeugt werden, so würden nur solche freie Schwingungen sich neben den erzwungenen geltend machen können, welche der Faden vor Beginn der periodischen Einwirkung besass. Diese freien Schwingungen hätten zur Folge, dass die Configuration des Fadens zur Zeit $t = o$ nicht durch die Funktionen f (x) dargestellt wird, welche sich aus Gleichung (3) des vor. § ergiebt, sondern durch eine beliebige Funktion F(x). Ebenso würde die Geschwindigkeit des Punktes x zur Zeit $t = o$ nicht durch die sich aus derselben Gleichung ergebende bestimmte Funktion φ (x) sondern durch eine willkürliche

Funktion Φ (x) ausgedrückt sein. Dementsprechend wäre das System der möglichen freien Schwingungen bestimmt durch die Differentialgleichung:

$$(I_1) \qquad \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2s \frac{dy_1}{dt} = k^2 \frac{d^2 y_1}{dx^2}$$

und durch die Bedingungsgleichungen:

(II_1) für $x = o$ . . . . $y_1 = o$,

(III_1) für $x = l$ . . . . $y_1 = o$,

(IV_1) für $t = o$ . . . . $y_1 = f_1(x) = F(x) - f(x)$,

wobei f_1 (x) stetig und eindeutig ist, auch nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, im Uebrigen aber den Charakter einer willkürlichen Funktion trägt,

$$(V_1) \qquad \text{für } t = o \ . \ . \ . \ . \qquad \frac{dy_1}{dt} = \varphi_1 = \Phi(x) - \varphi(x),$$

wobei für φ_1 (x) dasselbe gilt, wie für f_1 (x).

Um das Problem der freien Schwingungen aufzulösen, könnten wir versuchen, in Gleichung (1) des vorigen § die unbestimmten Faktoren m und n den Bedingungsgleichungen (II_1) und (III_1) entsprechend zu bestimmen; es würde sich ergeben, dass wir dieselben sämmtlich gleich Null setzen müssten. Diese Gleichung (1) wurde erhalten, indem wir von der particulären Lösung $e^{\alpha x + \beta t}$ ausgingen, welche der Differentialgleichung entspricht, wenn $\beta^2 + 2s\beta = \alpha^2 k^2$ ist. Dieser Relation geschieht bei Annahme einer sehr kleinen Reibung annähernd Genüge, wenn wir die Lösung schreiben entweder $e^{\beta t \pm \frac{1}{k}(\beta + s)x}$ oder $e^{\alpha x - (s \pm \alpha k)t}$

Betrachten wir den Ausdruck $e^{\alpha x - (s \pm \alpha k)t}$; α kann eine rein imaginäre Grösse ai sein, so dass sich aus der Exponentialfunktion die folgenden vier particuläre Lösungen entwickeln lassen:

$$e^{-st}\cos a(x+kt),\ e^{-st}\cos a(x-kt),\ e^{-st}\sin a(x+kt),\ e^{-st}\sin a(x-kt).$$

Aus diesen setzen wir die neue Lösung zusammen:

$$(1) \quad y = e^{-st}\left(m_1 \cos a(x+kt) + m_2 \cos a(x-kt) + n_1 \sin a(x+kt) + n_2 \sin a(x-kt)\right).$$

Zufolge der Bedingungsgleichung (II_1) muss sein:

$$e^{-st}\left(m_1 + m_2) \cos akt + (n_1 - n_2) \sin akt\right) \equiv o$$

Diese identische Gleichung hat zur Folge:

$$m_2 = -m_1 , \quad n_2 = n_1 ,$$

so dass man die Lösung in der Form

$$y_1 = e^{-st}\left(A \sin ax \cos akt + B \sin ax \sin akt\right)$$

darstellen kann. Damit die Bedingungsgleichung (III_1) erfüllt wird, haben wir a gleich einem Vielfachen von $\frac{\pi}{l}$ zu setzen; dann wird jede particuläre Lösung des Problems dargestellt durch einen Ausdruck von der Form:

$$y_1 = e^{-st}\left(A_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cos n\pi \frac{kt}{l} + B_n \sin n\pi \frac{x}{l} \sin n\pi \frac{kt}{l}\right),$$

und die vollständige Lösung durch die Gleichung:

$$(2)\quad y_1 = e^{-st} \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(A_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cos n\pi \frac{k}{l} + B_n \sin n\pi \frac{x}{l} \sin n\pi \frac{kt}{l}\right)$$

Die Coefficienten A und B bestimmen sich nach dem Fourier'schen Theorem aus den Bedingungsgleichungen (IV_1) und (V_1). Zufolge der Identität

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin n\pi \frac{x}{l} \equiv f_1(x) \qquad \text{ist}$$

$$(3)\quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l d\alpha \sin n\pi \frac{\alpha}{l} f_1(\alpha)$$

und zufolge der Identität

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\pi k}{l} B_n \sin n\pi \frac{x}{l} - s f_1(x) \equiv \varphi 1(x) \qquad \text{ist}$$

$$(4)\quad B_n \equiv \frac{2}{n\pi k}\int_0^l d\alpha \sin n\pi \frac{\alpha}{l}\left(\varphi 1(\alpha) + s f_1(\alpha)\right)$$

Es zeigt sich also, dass die Amplitude der freien Schwingung allmählich verringert wird, so dass letztere keinen dauernden Einfluss auf die Schwingungsform des Fadens hat. Die freie Schwingung hat zunächst eine nicht geringere Bedeutung wie ihre Rivalin, wenn die periodische äussere Kraft zu wirken beginnt; jedoch hat Reibung dieselbe nach einiger Zeit auf eine so unbedeutende reducirt, dass die erzwungene Schwingung allein im Besitze des Kampfplatzes bleibt. Diese Lage der Dinge dauert so lange an, wie die äussere Einwirkung.

---

§ 3.

Andere Methode, die erzwungenen Fadenschwingungen theoretisch zu behandeln.

Das Problem der erzwungenen Schwingungen kann noch auf eine andere Weise theoretisch behandelt werden, als wir es in § 1 gethan haben. Die erzwungene Schwingung lässt sich dadurch entstanden denken, dass eine fortschreitende Transversalbewegung sich von dem beweglichen Ende aus durch den Faden fortpflanzt und an dem festen Endpunkt total reflectirt wird, den Faden rückwärts durchläuft, darauf in dem beweglichen Endpunkte nochmals vollständig zurückgeworfen wird und so in's Unendliche fort.

Fragen wir zunächst, welches ist der mathematische Ausdruck für die durch einen unendlich langen Faden fortgepflanzte Transversalschwingung? Gehen wir aus von der Gleichung (1) des § 2:

$$y = m_1 e^{\frac{s}{k}x} \cos b\,(t + \tfrac{x}{k}) + m_2 e^{-\frac{s}{k}x} \cos b\,(t - \tfrac{x}{k}) +$$

$$n_1 e^{\frac{s}{k}x} \sin b\,(t + \tfrac{x}{k}) + n_2 e^{-\frac{s}{k}x} \sin b\,(t - \tfrac{x}{k}).$$

Für $x = \infty$ muss $y = o$ sein. Man sieht leicht, dass diese Bedingung nur dann erfüllt werden kann, wenn m_1 und n_1 gleich Null sind. Die Bedingung, dass für $x = o$ . . $y = \frac{a}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T}$ wird, bestimmt die Factoren m_2 und n_2 und die Grösse b, nämlich:

$$m_2 = o, \quad n_2 = \frac{a}{2}, \quad b = \frac{2\pi}{T},$$

so dass die fortgepflanzte Schwingung dargestellt wird durch die Gleichung:

$$(1) \qquad y = \frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}x} \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{k}).$$

Gehen wir nunmehr zur Betrachtung eines Fadens von endlicher Länge über. Die Schwingungsbewegung, deren Gleichung $y = \frac{a}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T}$ ist, wird über den Faden fortgepflanzt, erreicht den Punkt x, und x erhält eine Ausweichung aus der Ruhelage nach der Gleichung:

$$y_1 = \frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}x} \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{x}{k}).$$

Die Schwingungsbewegung pflanzt sich nach dem festen Endpunkt fort und wird in diesem reflectirt; wenn sie den Punkt x wieder erreicht, hat sie den Weg $2l - x$ durchlaufen; x erhält also zufolge der reflectirten Schwingung eine zweite Bewegung:

$$y_2 = -\frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}(2l-x)} \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{2l-x}{k})$$

Die reflectirte Schwingungsbewegung wird noch einmal zurückgeworfen, wenn sie den vibrirenden Endpunkt erreicht; wenn sie nach dieser Reflexion im Punkte x ankommt, hat sie den Weg $2l + x$ durchlaufen; x erhält demzufolge eine dritte Schwingungsbewegung:

$$y_3 = \frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}(2l+x)} \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{2l+x}{k})$$

Fährt man in dieser Betrachtung fort, so wird man erkennen, dass man die resultirende Bewegung des Punktes durch Summation einer unendlichen Reihe erhält, deren Anfangsglieder sind:

$$y_1 = \frac{a}{2}\, e^{-\frac{s}{k}x} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{k}\right),$$

$$y_2 = -\frac{a}{2}\, e^{-\frac{s}{k}(2l-x)} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2l-x}{k}\right),$$

$$y_3 = \frac{a}{2}\, e^{-\frac{s}{k}(2nl+x)} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2l+x}{k}\right),$$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

$$y_{2n} = -\frac{a}{2}\, e^{-\frac{s}{k}(2nl-x)} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2nl-x}{k}\right),$$

$$y_{2n+1} = \frac{a}{2}\, e^{-\frac{s}{k}(2nl+x)} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2nl+x}{x}\right).$$

Um die Addition auszuführen, entwickele man zuerst die Glieder mit ungeradem Index nach dem Schema:

$$\frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}(2nl+x)} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2nl+x}{k}\right) =$$

$$\frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}x} \left[\sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}2nl} \cos \frac{2\pi}{T}\frac{2nl}{k} - \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}2nl} \sin \frac{2n}{T}\frac{2nl}{k}\right]$$

und addire. Dann erhält man:

$$y_1 + y_3 + y_5 + \ldots \text{ in inf.} = \frac{a}{2} e^{-\frac{s}{k}x} \cdot$$

$$\left[\sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{k}\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{s}{k}2nl} \cos \frac{2\pi}{T}\frac{2nl}{k} - \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{k}\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{s}{k}2nl} \sin \frac{2\pi}{T}\frac{2nl}{k}\right]$$

Es ist aber:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\alpha}\cos n\beta + i\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\alpha}\sin n\beta = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{n(-\alpha+\beta i)}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\alpha+\beta i}} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)}$$

$$= \frac{1-e^{-\alpha}(\cos\beta-i\sin\beta)}{(1-e^{-\alpha}\cos\beta)^2+e^{-2\alpha}\sin^2\beta} = \frac{e^{\alpha}-\cos\beta+i\sin\beta}{e^{\alpha}-2\cos\beta+e^{-\alpha}}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\alpha}\cos n\beta = \frac{e^{\alpha}-\cos\beta}{e^{\alpha}-2\cos\beta+e^{-\alpha}}, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n\alpha}\sin n\beta = \frac{\sin\beta}{e^{\alpha}-2\cos\beta+e^{-\alpha}}.$$

Die Addition der Glieder mit ungeradem Index liefert demnach:

$$y_1+y_3+y_5+\ldots \text{ in inf.} = \frac{a}{2}e^{-\frac{s}{k}x}\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{k}\right)\frac{e^{\frac{s}{k}2l}-\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}}{e^{\frac{s}{k}2l}-2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}+e^{-\frac{s}{k}2l}}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{k}\right)\frac{\sin\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}}{e^{\frac{s}{k}2l}-2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}+e^{-\frac{s}{k}2l}}\right].$$

Ebenso erhält man durch Addition der Glieder mit geradem Index:

$$y_2+y_4+y_6+\ldots \text{ in inf.} = -\frac{a}{2}e^{-\frac{s}{k}2l-x}\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2l-x}{k}\right)\frac{e^{\frac{s}{k}2l}-\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}}{e^{\frac{s}{k}2l}-2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}+e^{-\frac{s}{k}2l}}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2l-x}{k}\right)\frac{\sin\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}}{e^{\frac{s}{k}2l}-2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k}+e^{-\frac{s}{k}2l}}\right].$$

und wenn man die Summe sämmtlicher y nimmt, wird die Configuration des Fadens durch die Gleichung:

$$(2)\quad y = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{e^{2\frac{s}{k}l} - 2\cos\frac{2\pi}{T}\frac{2l}{k} + e^{-2\frac{s}{k}l}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{s}{k}(2l-x)} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{k}\right) + e^{-\frac{s}{k}(2l-x)} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{k}\right) \\ - e^{\frac{s}{k}x} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2l-x}{k}\right) - e^{-\frac{s}{k}x} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{2l-x}{k}\right) \end{array} \right\}$$

dargestellt, welche mit der Gleichung (2) des § 1 identisch ist.

Aus der Gleichung für eine fortschreitende erzwungene Transversalschwingung erkennt man leicht die physikalische Bedeutung der Grösse $k = \sqrt{\frac{Pg}{p}}$.

Der Quotient $\frac{x}{k}$ in Gleichung (1) misst eine Zeitgrösse, nämlich die Zeit, in welcher sich die Schwingungsbewegung von dem Erregungspunkte bis zum Punkt x fortpflanzt; k bedeutet also die Strecke des Fadens, durch welche die Schwingungsbewegung in der Zeiteinheit fortschreitet, d. h. k ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingung.

Alle Punkte des Fadens, deren Entfernung vom Erregungspunkte der Schwingungsbewegung ein Vielfaches von kT ist, befinden sich mit dem Erregungspunkte in gleicher Phase der Bewegung, demnach ist kT die Wellenlänge der fortschreitenden Schwingung.

Setzt man in der Gleichung (3) des § 1 $s = o$, so ergiebt sich kT natürlicherweise auch als die Wellenlänge der stehenden erzwungenen Schwingung, welche nicht durch Reibung gedämpft wird.

Die Gleichung:

$$y = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{T}\frac{l-x}{k}}{\sin\frac{2\pi}{T}\frac{l}{k}} \sin 2\pi\frac{t}{T}$$

zeigt ferner, dass bei der ungedämpften stehenden Schwingung die Punkte, deren Entfernung vom festen Endpunkte ein ungerades

Vielfaches von $\frac{kT}{4}$ beträgt, für welche also $l - x = (2m - 1)\frac{kT}{4}$, einen grössten Werth der Amplitude besitzen, während die Punkte $l - x = m\frac{kT}{2}$ Knotenpunkte sind. Der Faden schwingt dann in der Weise, wie es Figur (1) darstellt, mit einer Anzahl von Halbwellen und noch einem Stück einer Halbwelle, welches immer an der Stimmgabel liegt.

Sobald aber eine Dämpfung der Schwingungen in Rechnung gezogen wird, zeigt sich, dass der Faden ohne eigentliche Knotenpunkte schwingt und dass die Lage der Punkte grösster und kleinster Schwingungsweite nicht mit der Lage der Knotenpunkte des ungedämpften Fadens übereinstimmt. Bei sehr kleiner Reibung ist indessen die Verschiebung der Schwingungsmaxima und -minima für die Beobachtung verschwindend klein, wenn der Faden mit einer geringen Anzahl von Halbwellen schwingt.

---

§ 4.

Beschreibung der Schwingungserscheinungen, welche auftreten, wenn die Vibrationen der Stimmgabel in der Richtung des Fadens erfolgen.

Herr Professor Melde hat beobachtet, dass ein weicher Faden auch dann durch eine tönende Stimmgabel in Transversalschwingungen versetzt wird, wenn die Vibrationen der Gabel in der Richtung seiner Länge vor sich gehen, und zwar abwechselnd in Schwingungen von der Periode T und 2 T, wenn T die Schwingungsdauer der Gabel ist.

Herr Postula in Lüttich macht in einer Broschüre „Nouvelle Étude des Expériences de M. Melde“*) Mittheilung von einer dritten Art von Transversalschwingungen, welche bei dieser Stellung der Gabel zum Faden auftreten können und die Schwingungsdauer $\frac{2}{3}$ T haben.

---

*) Liege bei J. Gothier, 1879.

Wir werden im Folgenden die von Melde und Postula beobachteten Schwingungserscheinungen und die Bedingungen ihres Zustandekommens kurz darstellen, müssen uns aber zuvor mit einigen Terminis bekannt machen, welche Melde eingeführt hat.

Herr Professor Melde bezeichnete diejenige Stellung seines Apparates, bei welcher die Gabel senkrecht zum Faden schwingt, mit dem Namen Transversalstellung und diejenige, bei welcher die Schwingungen in der Richtung des Fadens erfolgen, mit dem Namen Parallelstellung. Er unterschied bei der Parallelstellung die Schwingungen mit der Periode 2 T von denen mit der Periode T, indem er erstere als Haupt-, letztere als Nebenschwingungen bezeichnete. Dementsprechend nennt Postula die Schwingungen mit der Periode $\frac{2}{3}$ T tertiäre Schwingungen.

Ferner wird unter der ersten Haupt-, Neben- oder Tertiärspannung diejenige Spannung des Fadens verstanden, bei welcher er als Ganzes mit der Periode 2 T, T oder $\frac{2}{3}$ T schwingt. Der n^{ten} Haupt-, Neben- oder Tertiärspannung entspricht eine Schwingung mit n Halbwellen.

Man befestige einen Faden in der am Schlusse der Einleitung angegebenen Weise an einer Stimmgabel, so dass diese sich in der Transversalstellung befindet, und gebe dem Faden eine solche Spannung, dass er als Ganzes schwingt. Seine Schwingungsdauer ist dann nach dem vorigen § gleich T. Nun bringe man die Gabel in die Parallelstellung, indem man sie um ihre Axe dreht, und lasse sie wieder tönen: der Faden schwingt auch jetzt als Ganzes; seine Schwingungsdauer ist natürlich unverändert gleich T, und er vollführt die erste Nebenschwingung. Verringert man nun die Spannung auf den vierten Theil, so zeigt der Faden wieder eine einzige Halbwelle; er hat nun die erste Hauptspannung. Man verringere die Spannung noch weiter, bis sie $\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}$ . . . . der zuerst angewandten beträgt; der Faden hat dann resp. die 3. Nebenspannung, 2. Hauptspannung, 5. Nebenspannung, 3. Hauptspannung und schwingt mit resp. 3, 2, 5, 3, Halbwellen.

Zwischen der n^{ten} und $(n + 1)^{ten}$ Hauptspannung liegt stets eine Nebenspannung von der Ordnung $2n + 1$.

Die $2n^{te}$ Nebenspannung ist gleich der n^{ten} Hauptspannung; bei dieser Spannung tritt, wie die Beobachtung gezeigt hat, stets die n^{te} Hauptschwingung ein.

Dass die Nebenschwingungen stets die Schwingungsdauer T haben, wird dadurch experimentell nachgewiesen, dass man bei einer beliebigen Nebenspannung die Gabel in die Transversalstellung dreht. Dann schwingt der Faden mit derselben Anzahl von Halbwellen, wie in der Parallelstellung, und von der Gleichheit der Schwingungsformen in beiden Stellungen schliessen wir auf die Gleichheit der Perioden.

Giebt man dem Faden dagegen eine Hauptspannung und dreht dann die Gabel in die Transversalstellung, so theilt sich der Faden in die doppelte Anzahl von Halbwellen, woraus wir schliessen, dass die Schwingungsdauer einer Hauptschwingung in der Parallelstellung doppelt so gross ist, wie die der entsprechenden Schwingung in der Transversalstellung.

Man gebe dem Faden wieder die erste Nebenspannung und vergrössere sie dann auf $^9/_4$ derselben, so hat man die 1. tertiäre Spannung des Herrn Postula, und der Faden schwingt beim Tönen der Gabel wieder mit einer einzigen Halbwelle.

Die zweite tertiäre Spannung beträgt $^1/_4$ der ersten, die dritte $^1/_9$ derselben.

Die 3. Tertiärspannung ist also gleich der 2. Nebenspannung, und der Faden zeigt die zweite Nebenschwingung. Die 4. und 5. Tertiärschwingung lässt sich wieder beobachten. An Stelle der 6. tritt die 2. Hauptschwingung auf.

Die tertiären Schwingungen mit grösserer Anzahl von Halbwellen sind nicht leicht zu erhalten, weil die entsprechenden Spannungen nur sehr wenig von den nächstliegenden Haupt- und Nebenspannungen verschieden sind.

Vergrössert man die Spannung des Fadens über die erste Tertiärspannung hinaus, so treten keine Transversalschwingungen mehr ein; der Faden vollführt dann Longitudinalschwingungen von der Schwingungsdauer T, wie wir später nachweisen werden. Wir werden dann auch sehen, dass der Faden ebenfalls bei geringeren Spannungen, bei welchen Transversalschwingungen auftreten, gleichzeitig mit diesen Longitudinalbewegungen zeigt.

§ 5.

Melde's Ansicht über den Zusammenhang zwischen den Nebenschwingungen in der Parallelstellung und den Schwingungen in der Transversalstellung.

Es muss erklärt werden, woher es kommt, dass bei der Parallelstellung der Stimmgabel Transversalschwingungen des Fadens mit zweierlei Geschwindigkeit auftreten, und es liegt die Frage nahe, ob und inwiefern ein Zusammenhang zwischen den Nebenschwingungen in der Parallelstellung und den Schwingungen in der Transversalstellung bestehe.

Hierüber schreibt Herr Professor Melde in Poggendorff's Annalen Bd. CIX, Seite 210, in § 18 seiner Abhandlung: „Es „erhob sich nun die wichtige Frage, durch welche Schwingungen „der Gabel entstehen die Hauptschwingungen, durch welche „die Nebenschwingungen? Demzufolge müssen wir überlegen, „welche Bewegung der Punkt m der Gabel macht, an welchem „das eine Ende der Saite befestigt ist. Man begreift nun wohl, „dass diese Bewegung, welche sie auch sein möge, sich in zwei „Componenten zerlegen lässt, einmal in eine, die ihre Wirkung in „der Richtung der Länge der Saite äussert, welche ich mit dem „Namen Parallelcomponente belegen werde, und das anderemal „in eine, welche senkrecht zu Längsrichtung der Saite wirkt, „unter einem bestimmten Winkel gegen den Horizont, und der ich „den Namen Transversalcomponente beilege. Diese letztere „wird entstehen aus einer horizontal wirkenden Transversalkraft „und einer verticalen. Diese Annahme wird man gerechtfertigt „finden, wenn man bedenkt, dass der Punkt m im Allgemeinen „eine Curve doppelter Krümmung beschreibt. Eine kleine Ueber-„legung wird nun hinreichen, um sich zu überzeugen, dass bei der „Parallelstellung der Gabel die Parallelcomponente „die überwiegende sein wird, und dass ferner diese Componente „bei der Transversalstellung als eine horizontal wirkende „Transversalkraft wirkt, so dass also bei dieser Stellung die „Transversalcomponente die überwiegende ist."

Nun zieht Melde in § 20 derselben Abhandlung ungefähr folgenden Schluss:

Bei derselben Spannung haben die Schwingungen des Fadens in der Transversalstellung dieselbe Schwingungsdauer, wie die Nebenschwingungen in der Parallelstellung; die Schwingungen in der Transversalstellung sind die Folge einer Transversalkraft, daher werden auch die Nebenschwingungen in der Parallelstellung durch eine Transversalkraft verursacht sein; diese letztere aber kann nur von der kleineren (Transversal-) Componente der Stimmgabelbewegung herrühren.

Diese Erklärung ist sehr nahe liegend und einleuchtend, und es ist ihr noch nicht widersprochen worden; auch Postula hat sie anstandslos angenommen. Nichtsdestoweniger glauben wir einige Bedenken gegen dieselbe geltend machen zu müssen.

1) In der Parallelstellung ist die Parallelcomponente der Stimmgabelbewegung die überwiegende. Sie bringt die Hauptschwingungen zu Stande, und bei diesen kommt die kleinere Transversalcomponente nicht zur Geltung. Es liegt aber kein Grund vor, aus welchem die überwiegende Parallelcomponente bei den Nebenschwingungen unwirksam sein sollte.

2) Die Transversalcomponente wirkt unter einem bestimmten Winkel gegen den Horizont. Dann muss man doch annehmen, dass die Nebenschwingungen bei der Parallelstellung in derjenigen Ebene vor sich gehen, welche durch den festen Endpunkt und die Richtung der Transversalkraft bestimmt ist. Es zeigt sich aber, dass die Nebenschwingungen bald in der Horizontal-, bald in der Verticalebene vor sich gehen.

3) Die tertiären Schwingungen lassen sich nicht erklären, wenn man die Melde'sche Ansicht beibehält. Herr Postula ist freilich geneigt, die dritte Componente der Stimmgabelbewegung, die vertical gerichtete Transversalcomponente, als Ursache der Tertiärschwingungen anzunehmen. Aber wie ist es möglich, dass diese Transversalcomponente Schwingungen von einer anderen Periode hervorbringt, wie die horizontal wirkende?

4) Herr Professor Melde nimmt an, dass die Stimmgabel mehrere Schwingungen vollführt und wird hierzu veranlasst durch die Bemerkung, dass die Bahn des Stimmgabelpunktes im Allgemeinen eine doppelt gekrümmte Curve ist.

Aus der gekrümmten Bahn eines schwingenden Punktes darf man aber doch nicht ohne Weiteres folgen, dass derselbe eine zu-

sammengesetzte Schwingungsbewegung vollführe. Mit demselben Recht dürfte Jemand aus der Bahn des einfachen Kreispendels den Schluss ziehen, die Bewegung desselben sei eine zusammengesetzte Schwingung. — Die Bewegung des Stimmgabelpunktes ist zweifellos eine einfache Schwingungsbewegung auf vorgeschriebener Bahn, wie die Bewegung des ebenen Kreispendels.

Daher ist die Transversalcomponente die Stimmgabelbewegung, im Falle sich die Gabel in der Parallelstellung befindet, keine pendelartige Schwingung in demselben Sinne, wie die Parallelcomponente, und es ist nicht sofort einzusehen, warum sie ganz dieselben Schwingungsbewegungen hervorrufen kann, wie diese als Transversalcomponente in der Transversalstellung.

5) Es ist übrigens auch merkwürdig, dass die Transversalkraft bei der Parallelstellung nur Nebenschwingungen mit einer Anzahl von vollen Halbwellen hervorrufen soll, während die Transversalkraft in der Transversalstellung auch solche stehende Schwingungen veranlasst, bei denen der Faden die Erscheinung zeigt, welche Figur (1) darstellt.

---

§ 6.

Wüllner's Erklärung über das Zustandekommen der Transversalschwingungen in der Parallelstellung.

Die Melde'schen Schriften erklären nicht, wie es überhaupt möglich ist, dass eine Saite durch eine in der Richtung ihrer Länge wirkende Kraft in Transversalschwingungen versetzt werden kann. Die einzige mir bekannte Erklärung dieser auf den ersten Blick jedenfalls merkwürdigen Thatsache findet sich in dem bekannten Lehrbuch der Experimentalphysik von Wüllner*):

„Ist ab" (siehe Figur 2) „der Faden, welcher bei b an der „Stimmgabel befestigt ist, so bewegt sich, wenn die Gabel schwingt, „der Befestigungspunkt b zwischen b_2 und b_1 hin und her".

„Wenn sich der Punkt nach b_1 bewegt hat, so ist der Abstand „ab_1 kleiner als die Länge des Fadens, der Faden ist nicht mehr „gespannt und die Theile des Fadens sinken durch ihr Gewicht hinab."

*) § 134, p 487.

„Das Hinabsinken beginnt bei b, und bei einer gewissen „Spannung des Fadens wird es sich bis a fortgepflanzt haben „wenn b bis b_1 gekommen ist.“

„Geht nun b zurück bis b_2, so verlängert sich der Abstand „ab und der Faden nähert sich, indem die Theile desselben nach „und nach emporgezogen werden, wieder der geraden Linie, die er „bei der angenommenen Spannung des Fadens erreicht, wenn b in „b_2 angekommen ist. Geht nun der Befestigungspunkt das zweite „Mal von b_2 nach b, so muss der dann nicht mehr gespannte Faden „sich krümmen, aber, da seine Theilchen mit einer gewissen Ge„schwindigkeit in die Gleichgewichtslage eintraten, jetzt nach oben „hin, und der Faden nimmt bei der vorausgesetzten Spannung die „Lage $ac_2\ b_1$ an, wenn der Befestigungspunkt sich bis b_1 bewegt „hat. Geht b_1 dann wieder nach b_2 zurück, so kommt der Faden „wieder in die Lage ab_2. Es ergiebt sich somit, dass der Faden „eine ganze Schwingung macht, wenn die Gabel zwei Schwingungen „vollführt.“

Gegen diese Erklärung lassen sich verschiedene Einwendungen machen.

Durch Einwirkung der Schwere kann nur eine Bewegung in der Verticalebene hervorgebracht werden; der Versuch aber zeigt, dass die Schwingungen des Fadens ebenso gut in der Horizontalebene vor sich gehen, und bei der am Schlusse der Einleitung angegebenen Einrichtung rotirt die Schwingungsebene oft langsam um die Ruhelage des Fadens als Axe.

Ferner kann man doch auch eine Einrichtung treffen, bei welcher die Gabel horizontal liegt, der Faden aber vertical verläuft? Der Versuch zeigt, dass hierdurch die Transversalbewegung des Fadens nicht verändert wird.

---

§ 7.

Neue Erklärung der Schwingungserscheinungen, welche bei der Parallelstellung der Stimmgabel auftreten. Der Faden vollführt Longitudinalschwingungen, welche sich beim Auftreten von Transversalschwingungen mit diesen combiniren.

Wenn man sagt, eine durch Spannung elastische Saite werde in Longitudinalschwingungen versetzt, indem man sie in der Richtung ihrer Länge reibt, und dadurch ihre Theilchen in dieser

Richtung verschiebt, so macht man dabei die stillschweigende Voraussetzung, dass das Hooke'sche Elasticitätsgesetz bei diesen Verschiebungen seine Geltung nicht verlieren darf, dass also die vergrösserten und verringerten Ausdehnungen in den verschiedenen Theilen des Fadens stets den ihnen entsprechenden Spannungsänderungen proportional sind.

Dies Gesetz gilt aber nur innerhalb gewisser Grenzen, obwohl sein mathematischer Ausdruck:

$$\frac{l' - l}{l} = \frac{T}{E},$$

in welchem l' die gespannte, l die natürliche Länge der Saite, T die Spannung und E eine vom Material und Querschnitt der Saite abhängige Constante bezeichnet, keine Grenzen seiner Gültigkeit erkennen lässt.

Erstens kann man das Gesetz nicht anwenden bei sehr kleinen Spannungen, weil die Saite immer schon eine gewisse Spannung haben muss, um gestreckt zu sein; zweitens verliert es selbstverständlich seine Geltung, wenn die Spannung so gross wird, dass die Saite zerreisst.

Wir werden zu dieser Bemerkung veranlasst, indem wir uns die Frage vorlegen, ob und unter welchen Bedingungen ein weicher Faden obligatorischen Longitudinalschwingungen unterworfen werden kann?

Um das möglich zu machen, muss der Körper oder der materielle Punkt, welcher den Faden in Schwingung versetzen soll, zwischen so engen Grenzen oscilliren, dass der Faden gestreckt bleibt, wenn der bewegliche Endpunkt die kürzeste Entfernung vom festen Fadenende hat.

Wenn wir diese Bedingung als erfüllt annehmen, so wird eine Stimmgabel, welche in der Richtung der Länge eines Fadens schwingt, diesen sehr wohl in Longitudinalschwingungen versetzen können, und wir werden letzterer, wenn wir auf Reibung keine Rücksicht nehmen, eine Gleichung von der Form:

$$(1)\quad \xi = \frac{a'}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{(l - x)}{c}}{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l}{c}} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

uschreiben dürfen, in welcher ξ die longitudinale Verschiebung es Punktes x aus der Ruhelage zur Zeit t und c die Geschwindigkeit, mit der sich longitudinale Schwingungen durch den Faden fortpflanzen, bedeutet.

Um uns von dem Vorhandensein solcher Longitudinalschwingungen zu überzeugen, spannten wir einen Faden zwischen den beiden gleichgestimmten Stimmgabeln des Helmholtz'schen Apparates aus, bei welchem die Gabeln unter dem Einflusse eines intermittirenden electrischen Stromes schwingen.

Dabei richteten wir den Apparat so ein, dass sich die eine Gabel in der Parallelstellung, die andere in der Transversalstellung befand. Nun liessen wir die Gabel in der Parallelstellung zuerst allein tönen, indem wir zwischen die andere und den Electromagneten einen Holzkeil steckten, und vergrösserten dabei die Spannung des Fadens so lange, bis sich keine Transversalschwingungen mehr zeigten; dann unterbrachen wir die Schwingungen, entfernten den Holzkeil bei der zweiten Stimmgabel und stellten den Strom wieder her. Der Faden vollführte dann Transversalschwingungen; die einzelnen Fadenpunkte, deren Bahnen man namentlich bei Anwendung von Seidenfäden gut mit dem Auge verfolgen kann, bewegten sich aber nicht senkrecht gegen die Ruhelage des Fadens, sondern schwangen in geraden Linien, welche gegen die Ruhelage geneigt waren.

Diese Erscheinung ist ein Beweis dafür, dass der Faden gleichzeitig eine Longitudinal- und eine Transversalschwingung vollführte, welchen Schwingungen die Gleichungen:

$$(1)\quad \xi = \frac{a'}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l - x}{c}}{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l}{c}} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \text{ resp.}$$

$$(2)\quad y = \frac{b'}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{x}{k}}{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l}{k}} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

ukommen, wenn die x von der Stimmgabel ausgerechnet werden, welche sich in der Parallelstellung befindet. Denn wenn man aus

diesen beiden Gleichungen die Zeit t eleminirt, erhält man die Gleichung für die Bahn des Punktes x:

$$(3) \quad \frac{y}{\xi} = \frac{b'}{a'} \frac{\sin \frac{2\pi}{T}\frac{l}{c} \sin \frac{2\pi}{T}\frac{x}{k}}{\sin \frac{2\pi}{T}\frac{l}{k} \sin \frac{2\pi}{T}\frac{l-x}{c}}$$

welche einer geraden Linie angehört, die den Faden im Punkte x durchschneidet und unter einem bestimmten Winkel gegen denselben geneigt ist. Die Tangente dieses Neigungswinkels geht durch Null bei einem Knotenpunkt der Transversalbewegung.

Es mag an dieser Stelle bemerkt werden, dass wir einen Knotenpunkt der Longitudinalschwingung bei Anwendung von Fäden bis zu über 2 Meter Länge nicht beobachtet haben. Ein solcher würde sich dadurch characterisiren, dass seine Bewegung rechtwinkelig gegen die Ruhelage des Fadens gerichtet wäre und die Punkte auf der einen Seite von rechts oben nach links unten schwängen, während die Bahnen der Punkte auf der anderen Seite von links oben nach rechts unten verliefen. Die Tangente $\frac{y}{\xi}$ des Winkels, welchen die Bahnlinie des Punktes mit der Ruhelage des Fadens bildet, würde für einen Knotenpunkt der Longitudinalbewegung ihr Vorzeichen wechseln, indem sie durch ∞ hindurchgeht.

Wenn die Spannung des Fadens so gering ist, dass er sich nicht um die Amplitude des Stimmgabelpunktes zusammenziehen kann, so wird er gleichzeitig in Longitudinal- und Transversalschwingungen versetzt.

Die Richtigkeit dieser Behauptung wird nachgewiesen sein, wenn sich zeigt, dass die Schwingungserscheinungen bei den Nebenschwingungen dieselben sind, welche wir durch Combination einer Transversalschwingung mit einer Longitudinalschwingung von gleicher Periode erhielten, und wenn die beobachteten Erscheinungen bei den Haupt- und Tertiärschwingungen den Combinationen von einer Transversalschwingung mit der Schwingungsdauer 2 T resp. $\frac{2}{3}$ T und einer Longitudinalschwingung mit der Periode T entsprechen.

In der That sind die Bahnlinien der Fadenpunkte bei den Nebenschwingungen gerade, zur Richtung des ruhenden Fadens

geneigte Linien, welche in der ersten, dritten, fünften . . . . Halbwelle von rechts oben nach links unten gehen, wenn sie in der zweiten, vierten, sechsten . . . . Halbwelle von links oben nach rechts unten verlaufen.

Wenn wir nach den Gleichungen der Nebenschwingungen fragen, so müssen wir beachten, dass der Befestigungspunkt des Fadens an der Stimmgabel nur in der Richtung des Fadens schwingt, also ein transversaler Knotenpunkt sein muss. Die transversalen Amplituden können nicht durch die Amplitude des Befestigungspunktes ausgedrückt werden, da wir eine Abhängigkeit derselben von letzterer nicht kennen. Wir stellen sie durch die Amplitude α des Mittelpunktes einer Halbwelle dar, wenn wir der Transversalschwingung die Gleichung zuschreiben:

$$(4) \qquad y = \frac{\alpha}{2} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{x}{k} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

in welcher kT die Wellenlänge ist.

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung (1) für die Longitudinalschwingung und der aus (1) und (4) abgeleiteten Gleichung:

$$(5) \qquad \frac{y}{\xi} = \frac{\alpha}{a'} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l}{c}}{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l-x}{c}} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{x}{k}$$

für die Bahn des Punktes x, beschreibt die bei den Nebenschwingungen auftretenden Erscheinungen vollständig.

In Figur (3) haben wir eine Nebenschwingung des Fadens zu veranschaulichen gesucht.

Wie verhält es sich aber mit den Erscheinungen bei den Hauptschwingungen?

Wir halten es für einleuchtend, dass der Faden ab bei der ersten Hauptspannung [Figur (2)] die Lage $ac_1\ b_1$ oder $ac_2\ b_1$ hat und überhaupt eine grösste Ausweichung aus der Ruhelage zeigt, wenn sich der Stimmgabelpunkt in b_1 befindet. Wenn wir nun voraussetzen, der Faden vollführe gleichzeitig eine Longitudinal- und eine Transversalschwingung, so müssen wir demnach die Gleichungen

$$(6)\quad \xi = \frac{a'}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l-x}{c}}{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l}{c}} \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad \text{und}$$

$$(7)\quad y = \frac{\alpha}{2} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{x}{k} \cos \pi \frac{t}{T}$$

zuschreiben, in denen t von dem Augenblick der grössten Ausweichung gerechnet ist. Aus den Gleichungen (6) und (7) haben wir t zu eliminiren, um die Gleichung für die Bahn des Fadenpunktes zu erhalten.

Setzen wir

$$\frac{a'}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l-x}{c}}{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l}{c}} = \frac{A}{2},$$

$$\frac{\alpha}{2} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{x}{k} = \frac{B}{2} \quad \text{und}$$

$$\cos 2\pi \frac{t}{T} = 2 \cos^2 \pi \frac{t}{T} - 1,$$

so ist

$$\xi = \frac{A}{2} \left(2 \cos^2 \pi \frac{t}{T} - 1 \right) \quad \text{und}$$

$$y^2 = \frac{B^2}{4} \cos^2 \pi \frac{t}{T},$$

und aus den beiden letzten Gleichungen erhält man durch Elimination des Cosinus:

$$(8)\quad \left(\frac{y}{\frac{B}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\frac{A}{2}} + 1 \right).$$

Die Bahnen sämmtlicher Fadenpunkte sind also Parabeln, deren Axen mit der Richtung des ruhenden Fadens zusammenfallen und welche sämmtlich ihre concave Seite der Stimmgabel zukehren, wenn der Faden kürzer ist, als dass ein Knotenpunkt der Longitudinalschwingung auftreten kann. Figur (4) soll eine Hauptschwingung des Fadens versinnlichen.

Bei geringer Aufmerksamkeit auf die Bahnlinien, welche die Fadenpunkte beschreiben, wird man erkennen, dass die Fadenpunkte bei den Hauptschwingungen in der That Bogenstücke beschreiben,

wie wir sie abgeleitet haben, dass also unsere Annahme von einer Combination der Transversalschwingungen mit einer Longitudinalbewegung die beobachteten Thatsachen ohne Widerspruch erklärt.

Die Berechtigung dieser Annahme wird sich auch bei den Erscheinungen der Tertiärschwingungen zeigen. Auch bei diesen entsprechen die beobachteten Schwingungscurven der Fadenpunkte durchaus den abgeleiteten. Ihre Gleichung erhalten wir durch Elimination von t aus den Gleichungen, welche wir den Tertiärschwingungen zuschreiben müssen:

$$(6) \qquad \xi = \frac{a'}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l-x}{c}}{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l}{c}} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{und}$$

$$(9) \qquad y = \frac{\alpha}{2} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{x}{k} \cos 3\pi \frac{t}{T}.$$

Wir setzen wieder

$$\frac{a'}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l-x}{c}}{\sin \frac{2\pi}{T} \frac{l}{c}} = \frac{A}{2},$$

$$\frac{\alpha}{2} \sin \frac{2\pi}{T} \frac{x}{k} = \frac{B}{2}.$$

Zur Ausführung der Elimination bedürfen wir der goniometrischen Formeln:

$$\cos 3\pi \frac{t}{T} = \cos 2\pi \frac{t}{T} \cos \pi \frac{t}{T} - \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin \pi \frac{t}{T}, \text{ und}$$

$$\cos \pi \frac{t}{T} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{T}\right)}; \quad \sin \pi \frac{t}{T} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T}\right)},$$

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \sqrt{\left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T}\right)\left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{T}\right)}$$

Mit Hülfe dieser Formeln ergiebt sich:

$$\cos 3\pi \frac{t}{T} = \left(2 \cos 2\pi \frac{t}{T} - 1\right) \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{T}\right)}.$$

In dieser Gleichung setzen wir nach (6):

$$\cos 2\pi \frac{t}{T} = \frac{2\xi}{A} \text{ und nach (9): } \cos 3\pi \frac{t}{T} = \frac{2y}{B},$$

dann erhalten wir als Gleichung der Schwingungscurve:

$$(10) \qquad \frac{2y}{B} = \left(\frac{4\xi}{A} - 1\right)\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\xi}{A}\right)} \text{ oder}$$

$$(10\alpha) \qquad y^2 = \frac{B^2}{8}\left(\frac{4\xi}{A} - 1\right)^2\left(1 + \frac{2\xi}{A}\right).$$

Man beziehe diese Gleichung auf das rechtwinkelige Coordinatenkreuz, dessen Anfangspunkt durch die Ruhelage des Punktes x bestimmt ist und dessen Abscissenaxe die Richtung des ruhenden Fadens hat. Dann schneidet die Curve die Abscissenaxe in den Punkten $\xi = -\frac{A}{2}$, $\xi = \frac{A}{4}$, welch letzterer ein Doppelpunkt ist, und die Ordinatenaxe in den Punkten $y = \pm\frac{B}{2\sqrt{2}}$. Die Curve hat ein Maximum im Punkte $\xi = \frac{A}{4}$, $y = \frac{B}{2}$, ein Minimum im Punkte $y = -\frac{A}{4}$, $y = -\frac{B}{2}$ und zwei Rückkehrpunkte $\xi = \frac{A}{2}$, $y = \frac{B}{2}$ und $\xi = \frac{A}{2}$, $y = -\frac{B}{2}$.

In Figur (5) haben wir eine Tertiärschwingung des Fadens zu zeichnen versucht.

Es erübrigt nur noch die Frage, in welcher Weise das Zustandekommen der Transversalschwingungen in der Parallelstellung erklärt werden soll, wenn wir die Wüllner'sche Erklärung desselben nicht annehmen können?

Wenn der Faden nur eine Longitudinalschwingung vollführt und nicht so lang ist, dass er einen Knotenpunkt zeigt, so wird die Spannung in jedem Theil des Fadens verringert, wenn sich der Befestigungspunkt b [Fig. (2)] nach b_1 zu bewegt. Diese Bemerkung gilt auch dann noch, wenn die Gesammtspannung des Fadens so weit verringert wird, dass der Faden zugleich eine Transversalschwingung vollführt, weil die Longitudinalschwingung einer Saite von der Gesammtspannung unabhängig ist. Es finden dann aber nicht mehr den Spannungsverminderungen proportionale Ausdehnungsänderungen statt, wenn erstere grösser und grösser werden. In Folge dessen kann der Faden nicht mehr gestreckt bleiben; er erhält eine kleine Ausbiegung, welche sich über den ganzen Faden

erstrecken wird, wenn wir an der Voraussetzung festhalten, der Faden sei kürzer, als dass die Stimmgabelbewegung eine volle longitudinale Halbwelle in demselben erzeugen kann.

Der Faden verhält sich ganz ähnlich wie ein Metallstab, dessen eines Ende fest ist. Fährt man gegen das freie Ende eines solchen Stabes einen leichten Schlag mit einem Hammer aus, so ruft dieser Schlag einen Longitudinalton hervor. Lässt man aber einen schweren Hammer mit Wucht auf das freie Ende niederfallen, so hört man wieder den Longitudinalton, und gleichzeitig macht sich dem Auge eine andere Wirkung des Schlages bemerkbar, indem sich der Stab biegt. Die Ebene dieser Ausbiegung wird durch sekundäre Bedingungen bestimmt; sie wird durch den kleinsten Durchmesser des elleptischen Querschnittes gehen, wenn der Stab ein elliptischer Cylinder ist.

Die Ausbiegung, welche der Faden durch die Bewegung des Stimmgabelpunktes von b nach b_1 erhalten hat, ist die Veranlassung, dass derselbe eine Transversalschwingung vollführt, deren Geschwindigkeit von seiner Gesammtspannung abhängt. Der Faden wird gerade so in Schwingung versetzt, wie eine Saite, welcher man durch Zupfen oder Streichen mit einem Violinbogen eine Ausbiegung gegeben hat. Die Bewegung des Stimmgabelpunktes unterstützt diese Transversalbewegung bei bestimmten Spannungen des Fadens, indem jedesmal, wenn er sich von b nach b_1 bewegt, dem Faden ein neuer Impuls zur Ausbiegung gegeben wird.

Tyndall erläutert in seinen Vorlesungen über den Schall*), wie die erste Hauptschwingung des Fadens durch die Stimmgabel unterhalten wird:

„Zur genaueren Erläuterung befestige ich das eine Ende einer „schweren Schnur oder Kette an einem Haken A“, [siehe Figur (6)], „der in die Wand eingelassen ist, ergreife das andere Ende mit „meiner Hand und spanne die Schnur horizontal. Jetzt bewege „ich meine Hand in der Richtung der Schnur hin und her. Sie „schwingt als Ganzes und Sie können beobachten, dass jedesmal, „wenn die Schnur die Grenze ihrer Ausschwingung erreicht hat, „meine Hand am meisten vorwärts gegangen ist. Wenn sie in „einer verticalen Ebene schwingt, so muss meine Hand, um die

*) John Tyndall. Der Schall. 3. Vorlesung, Seite 126.

„Anstösse richtig einzutheilen, in dem Augenblick am meisten vor-
„wärts gegangen sein, wo die Schnur die obere Grenze erreicht,
„und ebenso in dem Augenblick, wo sie die untere Grenze ihrer
„Ausschwingung erreicht. Etwas Nachdenken wird Ihnen klar
„machen, dass meine Hand hierzu eine ganze Schwingung machen
„muss, während die Schnur nur eine halbe Schwingung macht."

Genau dasselbe gilt für unsere Stimmgabel, wenn der Faden die erste Hauptschwingung vollführt. Die schwere Schnur, welche ich mit einer beliebigen, gegen die Periode der Eigenschwingung einer elastischen Saite grossen Periode, in Schwingung versetzen kann, entspricht aber nicht in jedem Falle unserem Faden, welcher Eigenschwingungen vollführt, die nur durch die Stimmgabelbewegung unterhalten werden. Gesetzt, eine schwere Schnur habe die Schwingungsdauer 1 Sekunde. Ich kann die Schwingungen derselben dadurch unterhalten, dass ich das eine Ende in die Hand nehme und die Hand in der Sekunde zweimal hin und her bewege in der Richtung der Schnur. Die Schwingungen können indessen auch dann unterhalten werden, wenn ich meine Hand nur halb so schnell hin und her bewege, so dass sich meine Hand in demselben Tempo bewegt, wie die Schnur. Dann erreicht die Schnur jedesmal eine bestimmte Grenze ihrer Ausschwingung, beispielsweise die untere [Figur (7)], wenn meine Hand am meisten vorwärts gegangen ist, und die andere, obere Grenze, wenn meine Hand die grösste Entfernung vom festen Endpunkt der Schnur hat. Diesem Falle entspricht unser Faden bei der ersten Nebenschwingung. Man wird es denkbar finden, dass die Grundschwingung einer Schnur überhaupt dadurch unterhalten werden kann, dass man das eine Ende mit einer Periode, welche zur Periode der Eigenschwingung in einem einfachen harmonischen Verhältnis steht, in der Richtung der Schnur hin und her bewegt und dass die Schnur sich in 2, 3 . . . Halbwellen theilen wird, wenn die Periode der getheilten Schnur in einem einfacheren Verhältnis zu der Periode des schwingenden Endpunktes steht, als die Periode ihrer Grundschwingung.

Zum Schlusse dieses § wollen wir noch auf einen Unterschied zwischen den Transversalschwingungen in der Parallelstellung und in der Transversalstellung hinweisen. Letztere (wie auch die Longitudinalschwingungen in der Parallelstellung) sind erzwungene Schwingungen im eigentlichen Sinne. Ihre Periode ist allein von

der Periode der sie erzeugenden Schwingung abhängig; sie ist unter allen Umständen dieselbe, wie die Periode der erregenden Kraft. Die Transversalschwingungen in der Transversalstellung heissen erzwungen, wie die Luftschwingungen, welche unserem Ohre einen Ton übermitteln. Die Transversalschwingungen in der Parallelstellung dagegen sind keine eigentliche erzwungene Schwingungen. Ihre Periode hängt von derjenigen der erzeugenden Schwingung und von der Spannung des Fadens ab; jedoch steht sie zur Schwingungsdauer der erregenden Stimmgabel immer in einem einfachen Verhältnis (2 : 1, 2 : 2, 3 : 2). Diese Transversalschwingungen können erzwungen nur in dem Sinne heissen, wie die Schwingungen der Luft eines Resonators.

---

§ 9.

Uebertragungen der erzwungenen Schwingungen auf andere weiche Fäden, auf Saiten und auf Membrane.

Die erzwungenen Schwingungen weicher Fäden lassen sich leicht auf andere Körper übertragen, und diese Uebertragungen sind zum Theil sehr lehrreich sowohl in Hinsicht auf die Fadenschwingungen selbst, als auch auf andere Gegenstände der Wellenlehre und Akustik.

Erstlich lässt sich die Schwingungsbewegung eines Fadens auf andere, mit ihm verbundene Fäden übertragen. Befestigt man in irgend einem Punkte eines Fadens, der durch eine in der Transversalstellung befindliche Gabel in Schwingung versetzt wird, einen zweiten Faden, so wird auch dieser in Transversalschwingungen versetzt. Beide Fäden zeigen dann aber mannichfaltige complicrte Schwingungsformen und beschreiben doppelt gekrümmte Flächen, es sei denn, dass man sie in einem Knotenpunkt des ersten Fadens verknüpft hätte. In diesem Falle übertragen sich die einfachen Transversalschwingungen des ersten Fadens auf den zweiten, und wenn man in einem Knotenpunkte des letzteren einen dritten Faden befestigt, auch auf diesen dritten. Auf diese Weise kann man ein grosses Fadensistem, das in den verschiedensten Richtungen ein Zimmer durchkreuzt, durch eine einzige Stimmgabel

in Transversalschwingungen versetzen. Dieser Versuch lässt sich auch mit einem in der Parallelstellung transversalschwingenden Faden anstellen.

Man kann aber auch die Longitudinalschwingungen eines in der Parallelstellung befindlichen Fadens in Transversalschwingungen eines zweiten Fadens umsetzen und dadurch das Vorhandensein solcher Longitudinalschwingungen direct nachweisen.

Man verbinde einen Faden A mit einer Stimmgabel in der Transversalstellung, wie es in der Einleitung angegeben ist, und gebe ihm eine solche Spannung, dass er mit einer Anzahl voller Halbwellen schwingt. Um den Faden A schlinge man in einem Knotenpunkt einen zweiten Faden B, so dass dieser rechtwinkelig zu A verläuft, und verbinde das eine Ende von B mit einer der ersten gleichen Stimmgabel, welcher man in Beziehung auf B die Parallelstellung giebt; das andere Ende von B leite man über eine leicht bewegliche Rolle und hänge ein möglichst grosses Spannungsgewicht an. Man suche nun die Spannung des Fadens B gleichmässig auf beide Abschnitte desselben (welche nicht gleich lang zu sein brauchen) zu vertheilen und befestige die mit B verbundene Stimmgabel an den Tisch, wenn dieses erreicht ist. Lässt man dann die Gabel B tönen, so wird der Faden B in Longitudinalschwingungen versetzt, und diese erzeugen in dem Faden A dieselben Transversalschwingungen, welche man erhielt, als derselbe durch die mit ihm verbundene Stimmgabel in Schwingung versetzt wurde. Unser Versuch zeigt also, dass die Longitudinalschwingungen in der Parallelstellung dieselbe Schwingungsdauer besitzen, wie die Transversalschwingungen in der Transversalstellung.

Man beachte, dass der Verknüpfungspunkt der beiden Fäden ein Knotenpunkt des Fadens A wird; auch bei der Uebertragung der Fadenschwingungen auf eine steife Saite wird der Uebertragungspunkt ein Knotenpunkt der Saite. Um durch die Schwingungen eines weichen Fadens die Metallsaite eines Monochordes in Schwingung zu versetzen, verbindet man den Faden am besten gerade so mit der Saite, wie vorhin den Faden B mit dem Faden A, und zwar in der Nähe des einen Steges. Ferner bringe man einen verschiebbaren Steg unter der Saite.

Bei den verschiedensten Spannungen der Saite lässt sich dann eine Entfernung des Steges von dem Befestigungspunkt des Fadens

ausfindig machen, bei welcher die Saite vernehmlich zum Tönen gebracht wird. Der Ton der Saite ist dann immer gleich dem der Stimmgabel. Um den Saitenton dem Gabelton gegenüber recht scharf hervortreten zu lassen, thut man gut, letzteren zu dämpfen, indem man Stücke eines Kautschuckschlauches als Füsschen unter dem Resonnanzkasten der Stimmgabel anbringt und den Resonnanzkasten selbst mit loser Baumwolle ausfüllt.

In derselben Weise wie die erzwungenen Longitudinalschwingungen lassen sich auch die erzwungenen Transversalschwingungen weicher Fäden auf steife Saiten übertragen.

Dass der Uebertragungspunkt ein Knotenpunkt der Saite wird, lässt sich am besten dadurch nachweisen, dass man die Saite auf die tiefere Octave des Stimmgabeltones abstimmt.

Dann geräth die Saite in's Tönen, indem sie die Octave ihres Grundtones angiebt, wenn man den Faden in ihrem Halbirungspunkt anknüpft.

Sehr interessant ist die Uebertragung von Fadenschwingungen auf Membrane. Man spanne eine Papiermembran über einen Holzrahmen und befestige einen Faden mit dem einen Ende in der Mitte dieser Membran, mit dem anderen auf der Endfläche einer Stimmgabelzinke.

Dann stelle man Gabel und Membran einander gegenüber so auf, dass der Faden senkrecht zur Membran vorläuft und die Schwingungen der Gabel in der Richtung des Fadens erfolgen, und bringe die Gabel zum Tönen. Hat der Faden dann eine solche Spannung, dass er nur longitudinal oder mit wenigen scharf abgegrenzten Halbwellen schwingt, so tönt die Membran sehr laut und klar mit der Stimmgabel. Ihr Ton ist immer gleich dem der Stimmgabel, auch wenn der Faden neben der Longitudinalschwingung von der Schwingungsdauer T Transversalschwingungen von der Dauer 2 T oder $\frac{2}{3}$ T vollführt, (was man nach § 7 an den Schwingungscurven der Fadenpunkte erkennt).

Wenn man die Spannung des Fadens ändert, so ändert sich auch die Spannung der Membran und es tritt leicht der Fall ein, dass die Membran dadurch auf den Ton der Stimmgabel oder einen Oberton desselben abgestimmt wird. Dann giebt die Membran ausser dem Ton der Gabel noch Obertöne desselben an, namentlich

die Octave und Duodecime, und der Faden schwingt nicht mehr mit scharf abgegrenzten Halbwellen, sondern erscheint an den Knotenstellen nur etwas eingeschnürt.

Die Schwingungen der Membran lassen sich leicht weiter übertragen. Figur (8) versinnlicht die Einrichtung, welche ich traf, um in einer Glasröhre Kundt'sche Staubfiguren zu erzeugen. Ich spannte eine thierische Membran (Schweinsblase) über die grössere Oeffnung einer beiderseits offenen abgestumpft konischen Röhre aus Zinkblech und verband diese Röhre mit einer langen Glasröhre, in welcher Kieselsäurepulver vertheilt war. Der Faden wurde in der Mitte der Membran befestigt, indem ich ihn zuerst an einem kleinen Lederscheibchen fest machte und dann dieses auf die Membran aufleimte.

---

§ 10.

Demonstration der Hauptgesetze für transversal schwingende Saiten.

Ein weicher Faden, welcher bei den erzwungenen Schwingungen als Ganzes schwingt, repräsentirt eine Saite aus demselben Material und von derselben Spannung und Länge, deren Grundschwingung dieselbe Geschwindigkeit hat, wie die erzwungene Schwingung des Fadens. Berücksichtigt man ferner, dass die Länge des Fadens, bei welcher er als Ganzes obligatorische Schwingungen vollführt, der Halbwellenlänge der erzwungenen Schwingungen bei beliebiger Länge des Fadens gleich ist, so sind die Beziehungen zwischen dem Material, der Spannung, der Halbwellenlänge und der Dauer der obligatorischen Schwingung des Fadens dieselben wie die Beziehungen zwischen dem Material, der Spannung, der Länge und der Schwingungsdauer der dem Faden entsprechenden Saite.

Verbindet man nun einen weichen Faden mit einer Stimmgabel in der Transversalstellung, verändert die Spannung des Fadens und vergleicht die verschiedenen Spannungen mit den zugehörigen Halbwellenlängen, so findet man:

$$(1) \quad \frac{\sqrt{P}}{l} = \text{const.}$$

Bei Anwendung einer Stimmgabel von anderer Schwingungszahl ändert diese Constante ihren Werth; auf transversal schwingende Saiten bezogen, gilt also die Relation (1) nur für das Verhältniss der Längen und Spannungen bei ungeänderter Schwingungszahl.

Die Schwingungszahl einer Saite bleibt dieselbe, wenn man ihre Länge der Quadratwurzel ihrer Spannung proportional verändert, oder:

Zwei Saiten von derselben Beschaffenheit haben dieselbe Schwingungszahl, wenn sich ihre Längen wie die Quadratwurzeln aus ihren Spannungen verhalten.

Bestimmt man die Halbwellenlänge l_1 der erzwungenen Schwingung, welche eine Stimmgabel mit der bekannten Schwingungsdauer T_1 bei einer bestimmten Spannung des Fadens erzeugt, und die Halbwellenlänge l_2, welche bei derselben Spannung durch eine andere Stimmgabel von der Schwingungsdauer T_2 hervobgebracht wird, so ist

$$(2) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Diese Relation, auf freischwingende Saiten bezogen, stellt das erste Mersenne'sche Gesetz dar:

Für eine gegebene Saite und eine gegebene Spannung ändert sich die Schwingungszahl wie die Länge.

Man markire bei einem Faden, der durch eine Stimmgabel mit der Periode T_1 bei der Spannung P_1 in Schwingung versetzt wird, den Endpunkt, in welchem der Faden die Rolle tangirt, und die Knotenpunkte (bei Anwendung eines weissen Fadens, indem man die betreffenden Punkte schwärzt). Dann ersetze man die Stimmgabel durch eine andere mit der Periode T_2, sorge dafür, dass der Faden in demselben Punkte die Rolle berührt, wie vorhin, und bestimme die Belastung P_2, welche nöthig ist, damit die markirten Punkte auch für diejenige Schwingung Knotenpunkte werden, welche durch die Stimmgabel mit der Periode T_2 veranlasst wird. Dann wird man finden:

$$(3) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P_1}},$$

welche Relation, auf frei schwingende Saiten bezogen, der Ausdruck für das zweite Mersenne'sche Gesetz ist:

Bei einer Saite von gegebener Länge ändert sich die Schwingungsdauer umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Spannung.

Man verbinde einen Faden mit einer Stimmgabel von der beliebigen Schwingungsdauer T_1 in der Transversalstellung und bestimme die Halbwellenlänge l_1 der erzwungenen Schwingung bei der Spannung P. Einen zweiten Faden von anderem Material und anderem Querschnitt lasse man durch eine beliebige zweite Stimmgabel, welche die Periode T_2 hat, in Schwingung versetzen und messe auch an diesem Faden die Länge l_2 der Halbwellen, in welche sich der Faden bei der Spannung P vertheilt.

Ferner bestimme man mittelst der Waage die Gewichte p_1 und p_2 gleicher Längen von beiden Fäden. Dann hat man immer:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l_1 \sqrt{p_1}}{l_2 \sqrt{p_2}}.$$

Diese Gleichung gilt bei Anwendung zweier beliebiger Stimmgabeln, folglich auch bei Anwendung zweier solcher Gabeln mit der Periode T_1' und T_2', welche die beiden Fäden mit gleichen Halbwellenlängen in Schwingung versetzen.

In diesem Falle bestände die Gleichung

$$(4) \quad \frac{T_1'}{T_2'} = \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2'}}$$

welche, auf frei schwingende Saiten bezogen, das dritte Mersenne'sche Gesetz darstellt:

Saiten von derselben Länge und Spannung schwingen in Zeiten, welche sich verhalten wie die Quadratwurzeln aus dem Gewicht gleicher Längen, oder:

Die Schwingungsdauer einer Saite ändert sich wie die Quadratwurzel aus dem Gewicht der Längeneinheit.

---

§ 11.

Anwendung der Schwingungsübertragung durch weiche Fäden bei Problemen der praktischen Akustik.

Von der Uebertragung erzwungener Fadenschwingungen lässt sich bei der Lösung verschiedener akustischer Probleme ein vortheilhafter Gebrauch machen.

Die Erzeugung Kundt'scher Staubfiguren in einer Röhre, wie sie in § 6 gezeigt worden ist, gestattet eine einfache und sichere experimentelle Bestimmung der Schallgeschwindigkeit namentlich in weiteren Röhren, weil erstens die Töne der Stimmgabeln rein und nahezu einfach sind, wie es die von Kirchhoff theoretisch abgeleitete Formel verlangt, und weil man zweitens sicher sein darf, dass die Luft in dem Querschnitt der Röhre gleichmässig in Schwingung versetzt wird.

Ferner wird die Uebertragung von Schwingungen durch Fäden bei der Bestimmung absoluter Tonhöhen wesentliche Dienste leisten. Man hat z. B. die Schwingungszahlen zweier gleicher Stimmgabeln zu bestimmen. Bei Anwendung der Scheibler'schen Methode wird man zuerst die eine der Gabeln durch ein Klümpchen Wachs oder dergleichen beschweren, dann beide Gabeln mit dem Violinbogen zum Tönen bringen und die Zahl der Schwebungen eine Zeit lang beobachten.

Die Beobachtung der Schwebungen wird aber durch die Ungewissheit erschwert, ob ein Fallen des Tones von einer Interferenz oder dem allmählichen Abnehmen der Schwingung herrührt.

Desshalb verbinde man die Gabeln durch einen stark gespannten dünnen Seidenfaden, bringe beide in die Parallelstellung und streiche die eine fortwährend mit dem Violinbogen. Man wird es nach einiger Uebung leicht dahin bringen, dass die angestrichene Gabel nahezu mit gleichmässiger Stärke tönt. Ihre Schwingungen übertragen sich dann auf den Faden und von diesem auf die zweite Stimmgabel; beide Gabeln tönen gleich stark, und ihre Schwingungen lassen sich nun sehr leicht beobachten.

Nachdem man so die Differenz der Schwingungszahlen festgestellt hat, verbinde man die Gabeln nacheinander mit einem und demselben weichen Faden in der Transversalstellung und bestimme die Halbwellenlängen der erzwungenen Schwingungen bei gleichen Spannungen des Fadens. Oder man verbinde die Gabeln nach einander mit der Metallsaite eines Monochordes und bestimme in der in § 9 angegebenen Weise diejenigen Längen, welche durch die beiden Stimmgabeln zum Tönen gebracht werden. Das umgekehrte Verhältniss der gemessenen Längen ist dem Verhältniss der Schwingungszahlen gleich. Aus dem Verhältniss und der Differenz der Schwingungszahlen lassen sich diese selbst berechnen; man

erhält aber bei der beschwerten Stimmgabel nicht ihre eigentliche Schwingungszahl (da man die beiden als gleich bezeichneten Gabeln doch nicht wohl als vollkommen gleich betrachten darf.)

Um diese zu berechnen, nehme man das Wachsklümpchen von ihr weg und befestige es an der anderen Stimmgabel; hierauf bestimme man wieder die Differenz und das Verhältniss der Schwingungszahlen.

Hat man auf diese Weise die Schwingungszahl zweier Normalstimmgabeln bestimmt, so ist es leicht, die Schwingungszahl einer anderen Stimmgabel, eines Stabes, einer Klangscheibe, einer Glocke zu finden. Man hat nur nacheinander den zu untersuchenden Körper und eine Normalstimmgabel durch einen stark gespannten Faden, wie wir es schon mehrmals besprochen haben, mit einer Metallseite oder direct mit einem weichen Faden in der Transversalstellung zu verbinden und das Verhältniss der Schwingungszahlen zu bestimmen, wie es oben gezeigt ist.

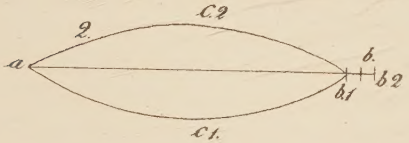
Soll die Schwingungszahl n einer gegebenen Saite von der Länge l gefunden werden, so hat man nur die Schwingungen einer Normalstimmgabel auf die Saite zu übertragen; wird dann das Stück l_1 der Saite zum Tönen gebracht und ist n_1 die Schwingungszahl der Normalgabel, so berechnet sich die gesuchte Schwingungszahl aus der Gleichung:

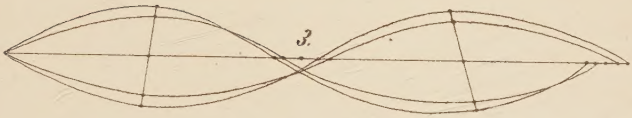
$$n = n_1 \frac{l_1}{l}.$$

Der Verfasser behält sich vor, eine Reihe von Untersuchungen über Schallgeschwindigkeiten und Tonhöhen nach der Methode, welche hier nur angedeutet werden konnte, demnächst zu veröffentlichen.

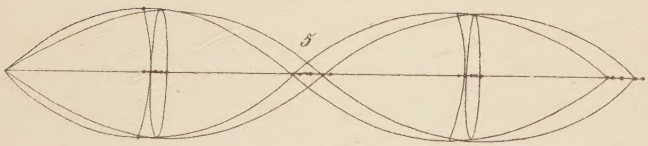
DRUCK VON JOHS. FASSBENDER, ELBERFELD.

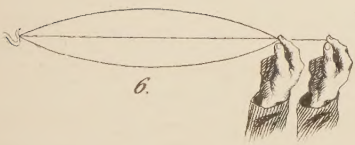
1.

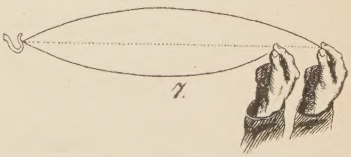

2.
c2
a
b
b2
b1
c1.

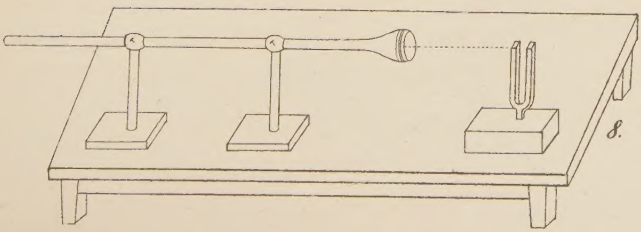

3.

4.


5


6.


7.


8.